5.1 – 5.5

ΘΕΩΡΙΑ

1.
Παραλληλόγραμμο ⇔ Απέναντι πλευρές παράλληλες

2.
Ιδιότητες παραλληλογράμμου
- Απέναντι πλευρές ίσες
- Απέναντι γωνίες ίσες
- Οι διαγώνιοι διχοτομούνται
- Το σημείο τομής των διαγωνίων είναι κέντρο συμμετρίας του παρ/μμου.

3.
Κριτήρια ώστε ένα τετράπλευρο να είναι παρ/μμο
- Απέναντι πλευρές ανά δύο ίσες
- Δύο απέναντι πλευρές ίσες και παράλληλες
- Απέναντι γωνίες ανά δύο ίσες
- Οι διαγώνιοι διχοτομούνται

4.
Ορθογώνιο ⇔ Παρ/μμο που έχει μία γωνία ορθή

5.
Ιδιότητες ορθογωνίου
- Έχει όλες τις ιδιότητες του παρ/μμου
- Όλες οι γωνίες ορθές
- Οι διαγώνιοι ίσες

6.
Κριτήρια ώστε ένα τετράπλευρο να είναι ορθογώνιο
- Παρ/μμο και μια ορθή γωνία
- Παρ/μμο και διαγώνιοι ίσες
- Τρεις γωνίες ορθές
- Όλες τις γωνίες ίσες

7.
Ρόμβος ⇔ Παρ/μμο που έχει δύο διαδοχικές πλευρές ίσες

8.

Ιδιότητες ρόμβου

- Έχει όλες τις ιδιότητες του παρ/μμου
- Όλες τις πλευρές ίσες
- Οι διαγώνιοι διχοτομούνται, διχοτομούν τις γωνίες του και είναι κάθετες

9.

Κριτήρια ώστε ένα τετράπλευρο να είναι ρόμβος

- Όλες τις πλευρές ίσες
- Παρ/μμο και δύο διαδοχικές πλευρές ίσες
- Παρ/μμο και διαγώνιοι κάθετες
- Παρ/μμο και μία διαγώνιός του διχοτομεί μία γωνία του

10.

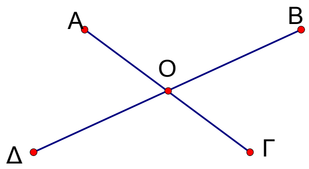
Τετράγωνο $\Leftrightarrow$ ορθογώνιο και ρόμβος

ΣΟΛΙΑ – ΜΕΘΟΔΟΙ

1.

Όταν λέμε ότι, δύο τμήματα διχοτομούνται, σημαίνει ότι έχουν ίδιο μέσο.

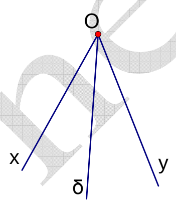
ΑΓ , ΔΒ διχοτομούνται $\Rightarrow$ ΟΑ = ΟΓ και ΟΒ = ΟΔ



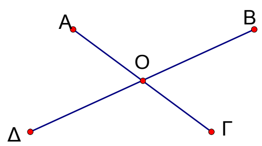
2.

Προσοχή : Άλλο διχοτόμηση γωνίας και άλλο διχοτόμηση τμημάτων.

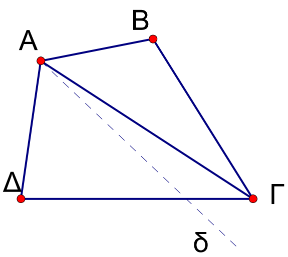
Διχοτόμηση γωνίας



Διχοτόμηση τμημάτων

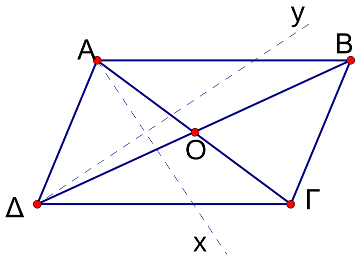


3.



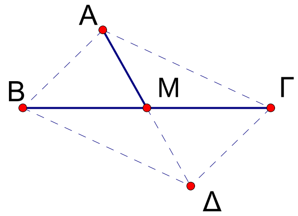
Μη συγχέουμε τη διαγώνιο ενός σχήματος με τη διχοτόμο γωνίας του.
Στο σχήμα : Το ΑΓ είναι διαγώνιος, ενώ η Αδ είναι η διχοτόμος της γωνίας $\Delta\hat{A}B$
Υπάρχουν περιπτώσεις όπου αυτά συμπίπτουν

4.



Στο παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ, οι διαγώνιοι ΑΓ, ΒΔ διχοτομούνται στο Ο, αλλά οι διχοτόμοι των γωνιών $\hat{A}$ και $\hat{\Delta}$ είναι οι Αx και Δy αντίστοιχα

5.



Η προέκταση διάμεσου τμήματος ΑΜ κατά ίσο του ΜΔ δημιουργεί παραλληλόγραμμο. (Διευκολύνει κάποια θέματα ιδιαίτερης δυσκολίας).

6.

Τα παραλληλόγραμμα μας προσφέρουν **i)** ίσες γωνίες
ii) παραπληρωματικές γωνίες
iii) ίσα και παράλληλα τμήματα – πλευρές
iv) ίσα τμήματα πάνω στις διαγωνίους
v) τρόπο απόδειξης ότι τρία η περισσότερα τμήματα συντρέχουν, αποδεικνύοντας ότι έχουν κοινό μέσο.

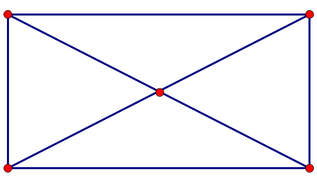
7.

Η λέξη "ορθογώνιο" σημαίνει ορθογώνιο παραλληλόγραμμο και όχι ορθογώνιο τρίγωνο.

8.

Δύο είναι οι ιδιότητες των διαγωνίων του ορθογωνίου **i) διχοτομούνται**
ii) είναι ίσες

9.

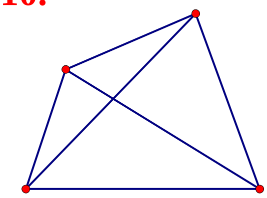


Φέρνοντας τις διαγώνιες ορθογωνίου, έχουμε

i) τέσσερα ισοσκελή τρίγωνα, ανά δύο απέναντι ίσα. Παρακαλώ εντοπίστε τα.

ii) τέσσερα ορθογώνια τρίγωνα ίσα. Παρακαλώ εντοπίστε τα.

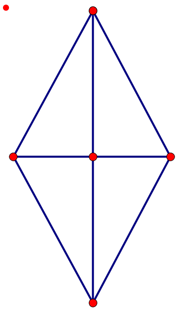
10.



Ένα τετράπλευρο με ίσες διαγώνιες δε σημαίνει ότι είναι ορθογώνιο. Βλέπε σχήμα.

Πρέπει, οι διαγώνιοί και να διχοτομούνται, δηλαδή να είναι και παραλληλόγραμμο.

11.



Φέρνοντας τις διαγώνιες ρόμβου, έχουμε

i) τέσσερα ισοσκελή τρίγωνα, ανά δύο απέναντι ίσα. Παρακαλώ εντοπίστε τα.

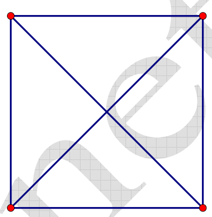
ii) τέσσερα ορθογώνια τρίγωνα ίσα. Παρακαλώ εντοπίστε τα.

12.

Τρεις είναι οι ιδιότητες των διαγωνίων του ρόμβου
i) διχοτομούνται
ii) είναι κάθετες
iii) διχοτομούν τις γωνίες του

Σε ένα τετράπλευρο, αν ισχύουν δύο από τις παραπάνω τρεις ιδιότητες, τότε ισχύει και η τρίτη και το τετράπλευρο είναι ρόμβος.

13.



Φέρνοντας τις διαγώνιες τετραγώνου έχουμε οκτώ ορθογώνια και ισοσκελή τρίγωνα ανά τέσσερα ίσα. Παρακαλώ εντοπίστε τα.

14.

Τέσσερις είναι οι ιδιότητες των διαγωνίων του τετραγώνου
i) διχοτομούνται
ii) είναι κάθετες
iii) διχοτομούν τις γωνίες του
iv) είναι ίσες

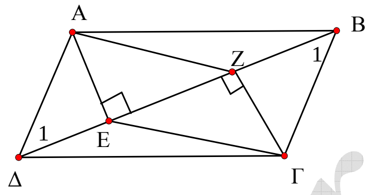
Σε ένα τετράπλευρο, αν ισχύουν η (iv) και δύο από τις άλλες παραπάνω τρεις ιδιότητες, τότε το τετράπλευρο είναι τετράγωνο.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1.

Έστω παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ . Από τις κορυφές Α και Γ φέρνουμε τις ΑΕ και ΓΖ κάθετες στην διαγώνιο ΒΔ . Δείξτε ότι το ΑΕΓΖ είναι παραλληλόγραμμο.

Προτεινόμενη λύση



Τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΒΖΓ είναι ίσα,

διότι ΑΔ = ΒΓ

$\hat{Β}_1 = \hat{Δ}_1$ ως εντός εναλλάξ

$Α\hat{Ε}Δ = 90^o = Β\hat{Ζ}Γ$

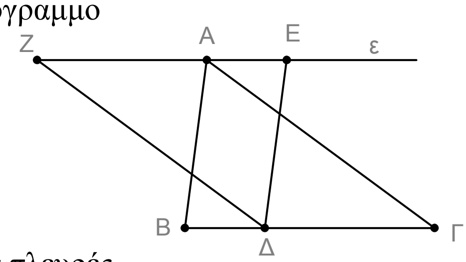
Οπότε ΑΕ = ΓΖ

Επιπλέον είναι και ΑΕ // ΓΖ σαν κάθετα τμήματα στην ΔΒ.
Δηλαδή ΑΕ = // ΓΖ , άρα το ΑΖΓΕ είναι παραλληλόγραμμο.

2.

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και ευθεία (ε) από το Α, παράλληλη στην ΒΓ. Από τυχαίο σημείο Δ της ΒΓ φέρνουμε παράλληλες στις ΑΒ και ΑΓ που τέμνουν την (ε) στα Ε και Ζ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ είναι ίσα .

Προτεινόμενη λύση

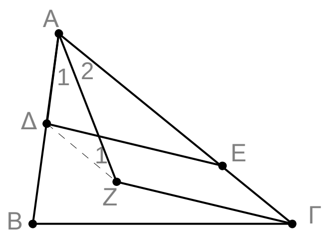


ΑΕ // ΒΔ και ΔΕ // ΑΒ $\Rightarrow$ ΑΕΔΒ παραλληλόγραμμο
Άρα ΑΒ = ΔΕ και ΒΔ = ΑΕ
Ομοίως από το παραλληλόγραμμο ΑΖΔΓ έχουμε
ΔΖ = ΑΓ και ΑΖ = ΔΓ
Αφού ΒΔ = ΑΕ και ΔΓ = ΑΖ προσθέτοντας
κατά μέλη βρίσκουμε ΒΓ = ΖΕ
Είναι λοιπόν τρ.ΑΒΓ = τρ. ΔΕΖ αφού έχουν ίσες πλευρές

3 .

Στις πλευρές ΑΒ και ΑΓ τριγώνου θεωρούμε σημεία Δ και Ε αντίστοιχα, έτσι ώστε ΑΔ = ΓΕ. Φέρνουμε την ΔΕ και από το Γ τη ΓΖ = // ΕΔ. Να αποδείξετε ότι η ΑΖ είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{Α}$.

Προτεινόμενη λύση



ΓΖ = // ΔΕ $\Rightarrow$ ΔΕΓΖ παρ/μμο $\Rightarrow$ ΔΖ =// ΕΓ
Αφού ΔΖ = ΕΓ και ΕΓ = ΑΔ $\Rightarrow$ ΑΔ = ΔΖ

$\hat{Α}_1 = \hat{Ζ}_1$ **(1)**

Ακόμα αφού ΔΖ // ΕΓ, είναι και ΔΖ// ΑΓ,
άρα $\hat{Ζ}_1 = \hat{Α}_2$ **(2)** σαν εντός εναλλάξ.

Από τις (1) και (2) $\Rightarrow$ $\hat{Α}_1 = \hat{Α}_2$ άρα η ΑΖ είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{Α}$.

4.

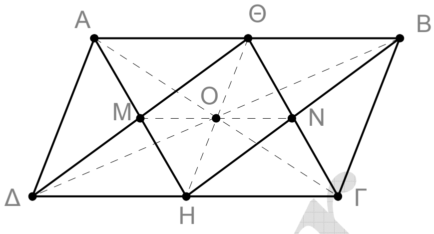
Έστω παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και Θ , Η τα μέσα των ΑΒ και ΔΓ αντίστοιχα .
Αν οι ΑΗ και ΔΘ τέμνονται στο Μ και οι ΒΗ και ΓΘ στο Ν , να αποδείξετε ότι

i) Το ΜΘΝΗ είναι παραλληλόγραμμο

ii) Οι ΔΒ, ΑΓ, ΜΝ συντρέχουν

Προτεινόμενη λύση

i)



ΑΒΓΔ παρ/μμο $\Rightarrow$ ΑΒ = // ΔΓ

Θ μέσο του ΑΒ και Η μέσο του ΔΓ $\Rightarrow$

ΘΒ = // ΔΗ $\Rightarrow$

ΘΒΗΔ παρ/μμο $\Rightarrow$

ΔΘ // ΒΗ

Ομοίως αποδεικνύεται ότι ΑΘΓΗ παρ/μμο, άρα ΑΗ // ΓΘ

Αφού λοιπόν ΔΘ // ΒΗ και ΑΗ // ΓΘ το ΘΜΗΝ είναι παραλληλόγραμμο

ii)

Τα ΑΓ και ΒΔ σαν διαγώνιες του παρ/μμου ΑΒΓΔ διχοτομούνται έστω στο Ο.
Έστω Ο το κοινό τους μέσο

Τα ΒΔ και ΘΗ είναι διαγώνιες του παρ/μμου ΘΒΗΔ, άρα η ΘΗ διέρχεται από το μέσο Ο της ΒΔ το οποίο είναι και μέσο της ΘΗ

Επίσης τα ΜΝ και ΘΗ είναι διαγώνιες του παρ/μμου ΜΘΝΗ, συνεπώς η ΜΝ διέρχεται από το μέσο Ο της ΘΗ το οποίο είναι και μέσο της ΜΝ

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι τα τμήματα ΔΒ , ΑΓ , ΘΗ , ΜΝ έχουν κοινό μέσο το Ο, επομένως συντρέχουν στο Ο.

5.

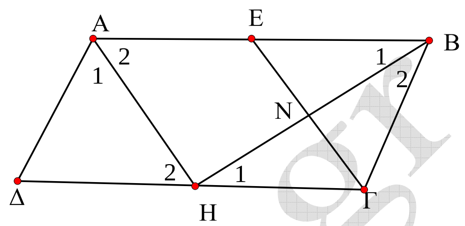
Έστω Ε το μέσο της πλευράς ΑΒ ενός παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ, για το οποίο ισχύει ΑΒ = 2ΒΓ. Να αποδείξετε ότι

i) Η διχοτόμος της γωνίας $\widehat{B}$ διέρχεται από το μέσο του τμήματος ΓΕ και από το μέσο της πλευράς ΓΔ.

ii) Οι διχοτόμοι των γωνιών $\widehat{B}$ και $\widehat{A}$ τέμνονται πάνω στην ΓΔ .

Προτεινόμενη λύση

i)



Έστω ότι η διχοτόμος της γωνίας Β τέμνει το ΕΓ στο Ν και τη ΔΓ στο Η.

Ε μέσο του ΑΒ $\Rightarrow$ ΕΒ = $\dfrac{AB}{2}$

Αλλά ΒΓ = $\dfrac{AB}{2}$

Άρα ΕΒ = ΒΓ, δηλαδή το τρίγωνο ΒΕΓ είναι ισοσκελές οπότε η διχοτόμος της γωνίας της κορυφής του θα είναι και διάμεσος συνεπώς Ν μέσο του ΕΓ

Ακόμα έχουμε $\widehat{B}_1 = \widehat{B}_2$ και $\widehat{B}_1 = \widehat{H}_1$ ως εντός εναλλάξ, άρα $\widehat{B}_2 = \widehat{H}_1$ δηλαδή το τρίγωνο ΒΓΗ είναι ισοσκελές με ΓΗ = ΒΓ = $\dfrac{AB}{2}$.

Και αφού ΔΓ = ΑΒ, θα είναι ΓΗ = $\dfrac{\Gamma\Delta}{2}$, άρα το Η είναι μέσο του ΔΓ

ii)

Φέρνουμε την ΑΗ τότε $\widehat{A}_2 = \widehat{H}_2$ **(1)** ως εντός εναλλάξ,

Αφού το Η είναι μέσο του ΔΓ, θα είναι ΔΗ = $\dfrac{\Gamma\Delta}{2} = \dfrac{AB}{2}$ = ΒΓ = ΑΔ.

Άρα το τρίγωνο ΔΑΗ είναι ισοσκελές, συνεπώς $\widehat{A}_1 = \widehat{H}_2$. **(2)**

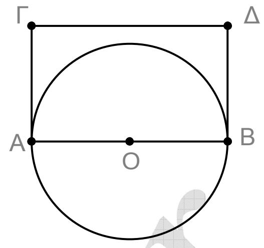
Από τις (1) και (2) έχουμε ότι $\widehat{A}_2 = \widehat{A}_1$, άρα η ΑΗ είναι διχοτόμος της $\widehat{A}$.

Επομένως οι διχοτόμοι των γωνιών $\widehat{B}$ και $\widehat{A}$ τέμνονται στο μέσο Η της ΓΔ

6.

Φέρουμε τις εφαπτομένες ε_1 και ε_2 ενός κύκλου διαμέτρου ΑΒ στα Α και Β . Πάνω στις ε_1 και ε_2 παίρνουμε σημεία Γ και Δ αντίστοιχα έτσι ώστε ΑΓ= ΒΔ . Να αποδείξετε ότι η ΓΔ είναι παράλληλη στην ΑΒ ή ότι διέρχεται από το κέντρο του κύκλου.

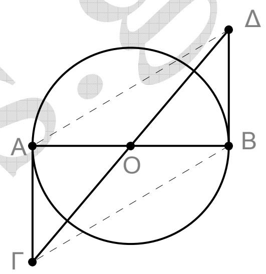
Προτεινόμενη λύση



1η περίπτωση : Τα Γ και Δ είναι στο ίδιο ημιεπίπεδο ως προς την ΑΒ

Επειδή η ΑΒ είναι διάμετρος και ΓΑ , ΔΒ εφαπτόμενες,
θα είναι $\widehat{A} = \widehat{B} = 90^o$.

Άρα οι ΑΓ και ΒΔ είναι παράλληλες σαν κάθετες στην ΑΒ.
Και επειδή ΑΓ = ΒΔ, το ΑΒΔΓ είναι ορθογώνιο.
Οπότε ΓΔ // ΑΒ



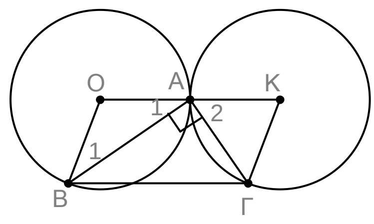
2η περίπτωση : Τα Γ και Δ είναι εκατέρωθεν της ΑΒ.
Πάλι είναι ΑΓ = // ΔΒ, οπότε το ΑΓΒΔ είναι παρ/μμο.
Επομένως οι διαγώνιοί του διχοτομούνται.
Και επειδή Ο μέσο της ΑΒ, η ΔΓ θα διέρχεται από το Ο.

7.

Δύο ίσοι κύκλοι με κέντρα Ο και Κ εφάπτονται εξωτερικά στο Α. Θεωρούμε ένα σημείο Β του κύκλου με κέντρο το Ο και ένα σημείο Γ του άλλου κύκλου έτσι ώστε η γωνία $B\widehat{A}\Gamma$ να είναι ορθή. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΟΒΓΚ είναι παρ/μμο .

Προτεινόμενη λύση

Επειδή οι κύκλοι είναι ίσοι θα είναι ΟΒ = ΚΓ
Το τρίγωνο ΟΑΒ είναι ισοσκελές,



άρα $\widehat{A}_1 = \widehat{B}_1$, οπότε $\widehat{O} = 180^o - 2\widehat{A}_1$.

Ομοίως είναι $\widehat{K} = 180^o - 2\widehat{A}_2$

Συνεπώς $\widehat{O} + \widehat{K} = 360^o - 2(\widehat{A}_1 + \widehat{A}_2)$

Αλλά $\widehat{A}_1 + \widehat{A}_2 = 90^o$ αφού $B\widehat{A}\Gamma = 90^o$

Οπότε $\widehat{O} + \widehat{K} = 180^o - 2 \cdot 90^o$

$\widehat{O} + \widehat{K} = 180^o$ οπότε ΟΒ// ΚΓ

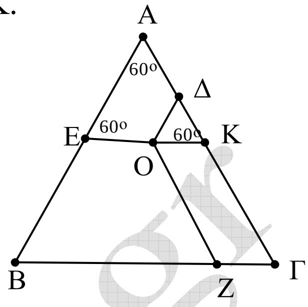
Άρα τελικά ΟΒ = // ΚΓ, συνεπώς το ΟΒΓΚ είναι παραλληλόγραμμο.

8.

Από ένα εσωτερικό σημείο Ο ενός ισοπλεύρου τριγώνου ΑΒΓ φέρουμε παράλληλες προς τις πλευρές ΑΒ , ΒΓ , ΑΓ , οι οποίες τέμνουν τις ΑΓ , ΑΒ και ΒΓ αντίστοιχα στα σημεία Δ , Ε , Ζ . Να αποδείξετε ότι το άθροισμα ΟΔ + ΟΕ + ΟΖ είναι ίσο με την πλευρά του ισοπλεύρου τριγώνου .

Προτεινόμενη λύση

Προεκτείνουμε την ΕΟ η οποία τέμνει την ΑΓ σε σημείο Κ.



Τότε $\hat{E} = \hat{B} = 60^o$ και επειδή $\hat{A} = 60^o$, το τρίγωνο ΑΕΚ είναι ισόπλευρο άρα ΑΕ = ΕΚ = ΑΚ **(1)**

ΟΔ // ΑΒ $\Rightarrow$ $O\hat{\Delta}K = \hat{A} = 60^o$ και $\Delta\hat{K}O = 60^o$

το τρίγωνο ΔΟΚ είναι ισόπλευρο άρα

ΔΟ = ΟΚ = ΔΚ

Οπότε ΕΟ + Ο Δ = ΕΟ + ΟΚ = ΕΚ και λόγω της (1)

ΕΟ + ΟΔ = ΑΚ **(2)**

Το ΟΚΓΖ είναι προφανώς παραλληλόγραμμο, άρα ΟΖ = ΚΓ **(3)**

(2) + (3) $\Rightarrow$ ΕΟ + ΟΔ + ΟΖ = ΑΚ + ΚΓ

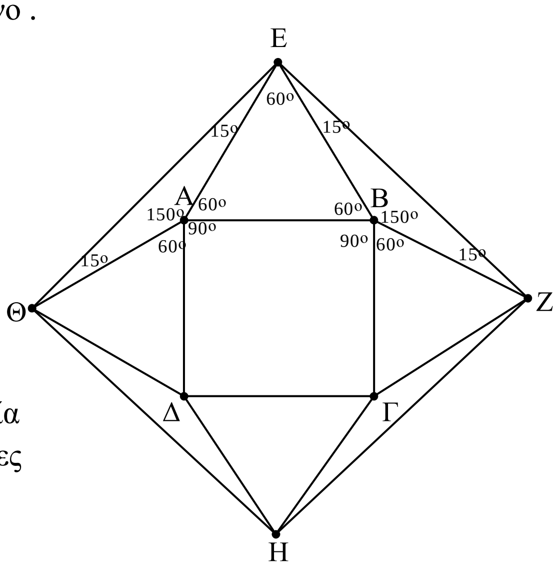
ΕΟ + ΟΔ + ΟΖ = ΑΓ

9.

Έξω από ένα τετράγωνο ΑΒΓΔ κατασκευάζουμε τα ισόπλευρα τρίγωνα ΑΒΕ, ΒΓΖ, ΓΔΗ , ΔΑΘ .

Να αποδείξετε ότι το ΕΖΗΘ είναι τετράγωνο .

Προτεινόμενη λύση



$\Theta\hat{A}E = 360^o - 60^o - 90^o - 60^o = 150^o$

Ομοίως $E\hat{B}Z = 150^o$

Π – Γ – Π $\Rightarrow$ τρ.ΑΘΕ = τρ.ΒΕΖ $\Rightarrow$

ΘΕ = ΕΖ

Ομοίως αποδεικνύεται ότι

ΘΕ = ΘΗ = ΗΖ,

Οπότε ΘΕΖΗ είναι ρόμβος.

Στο ισοσκελές τρίγωνο ΑΘΕ, αφού η γωνία του Α είναι 150^o, οι παρά τη βάση γωνίες του θα είναι 15^o η κάθε μία.

Ομοίως στο τρίγωνο ΒΕΖ.

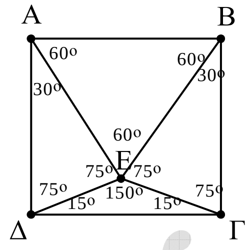
Συνεπώς $\Theta\hat{E}Z = 15^o + 60^o + 15^o = 90^o$,

επομένως ο ρόμβος ΘΕΖΗ είναι τετράγωνο

10 .

Στο εσωτερικό ενός τετραγώνου ΑΒΓΔ κατασκευάζουμε το ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΕ
Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΓΔΕ είναι ισοσκελές και να υπολογίσετε τις γωνίες του

Προτεινόμενη λύση



Επειδή το τρίγωνο ΕΑΒ είναι ισόπλευρο, θα έχουμε ότι
$Δ\hat{Α}Ε = 30^o = Ε\hat{Β}Γ$
Τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΒΕΓ είναι ίσα διότι έχουν
ΑΔ = ΑΕ = ΒΕ = ΒΓ και $Δ\hat{Α}Ε = 30^o = Ε\hat{Β}Γ$
Οπότε ΕΔ = ΕΓ άρα το τρίγωνο ΕΔΓ είναι ισοσκελές
Στα ισοσκελή τρίγωνα ΑΔΕ και ΒΕΓ οι γωνίες των κορυφών τους είναι 30^o,
οπότε κάθε μία γωνία από τις προσκείμενες στις βάσεις τους θα είναι 75^o.
Οπότε $Ε\hat{Δ}Γ= 15^o = Ε\hat{Γ}Δ$ και $Δ\hat{Ε}Γ=150^o$